Matematika A1 – 1. „písemné" cvičení – dodatek (*)

Vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla

(definice ve cvičení 1. – $|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$, $a \in R$)

Ukažme, že pro všechna $a, b, c \in R$ platí následující tvrzení:

1) $\underline{|a| = |-a|}$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |-a| = \begin{cases} -a, & -a \geqq 0, \text{ tj. } a \leqq 0 \\ -(-a), & -a < 0 \Leftrightarrow a > 0 \end{cases}$$

což je „totéž" (jen jednou je $a=0$ „v $a \geqq 0$" a podruhé v $a \leqq 0$, což ale zřejmě nevadí);

2) $\underline{|a| = \max(a, -a)}$ ($\max(\alpha, \beta)$ je větší z čísel α, β, jsou-li $\alpha \neq \beta$, jinak $\max(\alpha, \beta) = \alpha = \beta$)

je-li $a \geqq 0$, pak $-a \leqq 0$, a tedy $\max(a, -a) = a$
je-li $a < 0$, pak $-a > 0$, a tedy $\max(a, -a) = -a$
} a toto je „stejné" jako def. $|a|$; !

3) $\underline{a \leqq c \wedge -a \leqq c \Rightarrow |a| \leqq c}$

toto tvrzení snadno plyne z 2):
je-li $a \leqq c \wedge -a \leqq c$, pak i $\max(a, -a) \leqq c$,
tj. (dle 2) $|a| \leqq c$, což jsme měli ukázat;

4) $|a+b| \leqq |a+b|$ – velmi důležitá vlastnost absolutní hodnoty !

Tvrzení dokážeme užitím předchozích vlastností 2) a 3):

2 (2) $\Rightarrow$: $a \leq |a|$ i $-a \leq |a|$, a stejně
$b \leq |b|$ i $-b \leq |b|$;

$$\left.\begin{aligned} &\text{potom} \quad a+b \leq |a|+|b| \;, \text{ a též i} \\ &-(a+b) = -a+(-b) \leq |a|+|-b| = |a|+|b| \end{aligned}\right\} \underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$|a+b| \leq |a|+|b|$ (což jsme měli ukázat);

a pak už snadno odtud:

$$|a-b| = |a+(-b)| \leqq |a|+|-b| = |a|+|b|$$

tj. $|a-b| \leqq |a|+|b|$

5) a také, když platí $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$, $\alpha, \beta \in R$, když zvolíme $\alpha = a-c$, $\beta = c-b$, pak dostáváme z 4)

$|(a-c)+(c-b)| \leqq |a-c|+|c-b|$, tj.

$$\underline{|a-b| \leq |a-c|+|c-b|}$$

6) a „odhad" $\underline{|a.b| \leqq \frac{1}{2}(a^2+b^2)}$:

platí: $(a+b)^2 \geqq 0$ i $(a-b)^2 \geqq 0$, tedy

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqq a^2+2ab+b^2 \Rightarrow -a.b \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\ \text{a} \quad &0 \leqq a^2-2ab+b^2 \Rightarrow ab \leqq \frac{a^2+b^2}{2} \end{aligned}\right\} \underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$|a.b| \leqq \frac{a^2+b^2}{2}$, což jsme měli ukázat.